Calcul différentiel – TD 3 avec corrections

Accroissements finis, dérivées d'ordre supérieur

Exercice 1. Soit X un espace affine normé et soit $f : \mathbb{R} \to X$ dérivable au voisinage de 0. On suppose $k \geqslant 0$ et $\|f'(h)\| = o(h^k)$ lorsque $h \to 0$. Montrer que $f(h) - f(0) = o(h^{k+1})$

Correction. Voir poly.

Exercice 2. Soit X un espace affine normé, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to X$, et $t_0 \in I$. On suppose que $f : I \to X$ est k fois dérivable en $t_0 \in \mathring{I}$ ($k \geqslant 1$). En utilisant une récurrence sur k et l'exercice 1, montrer que

$$f(t_0 + h) = f(t_0) + \sum_{j=1}^{k} \frac{h^j}{j!} f^{(j)}(t_0) + o(h^k)\,. \tag{1}$$

La fonction polynomiale $t \mapsto f(t_0) + \sum_{j=1}^{k} \frac{(t-t_0)^j}{j!} f^{(j)}(t_0)$ s'appelle le **polynôme de Taylor** de f en t_0 à l'ordre k.

Correction. Voir poly.

Exercice 3. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(t) = e^{-1/t^2} \quad \text{pour } t \neq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, et que f est tangente à zéro en l'origine, à tout ordre.
2. Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $k \geqslant 0$, $f^{(k)}(0) = 0$.
3. Calculer le polynôme de Taylor de f à l'ordre k en $t = 0$.
4. Construire une fonction $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $g(t) = 0$ pour $t \leqslant 0$ et $g(t) > 0$ pour $t > 0$.
5. En déduire la construction d'une fonction $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $h(t) = 0$ pour $|t| \geqslant 1$ et $h(t) > 0$ pour $t \in]-1, 1[$.
6. En déduire la construction d'une fonction croissante $H \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $H(t) = 0$ pour $t \leqslant -1$ et $H(t) = 1$ pour $t \geqslant 1$.

Correction.

1. $t^{-k} e^{-1/t^2} \to 0$ quand $t \to 0$ par croissance comparée.
2. même argument pour le taux d'accroissement et la dérivée, par récurrence, qui ont la forme $R(t)e^{-1/t^2}$ où R est une fraction rationnelle.
3. Il est nul !
4. Comme f mais en imposant 0 sur $\mathbb{R}_-$, les preuves fonctionnent de la même façon.
5. Par exemple $h(t) = g(t+1)g(1-t)$.

6. Par exemple $H(t) = \left(\int_{-\infty}^{t} h(s)\,\mathrm{d}s\right) . \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(s)\,\mathrm{d}s\right)^{-1}$

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel normé. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to E$ de classe C^2 est tangente à zéro en 0 à l'ordre 2 si et seulement si f ainsi que ses deux premières dérivées s'annulent en 0.

Correction. Comme f est de classe C^2, on a la formule de Taylor à l'ordre 2 en 0 :

$$f(h) = f(0) + h \cdot f'(0) + \frac{h^2}{2} \cdot f''(0) + o(h^2).$$

Maintenant, si $f(0)$, $f'(0)$ et $f''(0)$ sont nuls, alors $f(h) = o(h^2)$, donc f est tangente à 0 à l'ordre 2 en 0.
Réciproquement, si f est tangente à 0 à l'ordre 2 en 0, alors $f(0) = \lim\limits_{h\to 0} f(h) = \lim\limits_{h\to 0} o(h^2) = 0$ et $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h - 0} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{o(h^2)}{h} = 0$. Pour terminer, la formule de Taylor se réduit à $f(h) = \frac{h^2}{2} f''(0) + o(h^2)$, on en déduit que $\frac{h^2}{2} f''(0) = o(h^2)$, nécessairement $f''(0) = 0$.

Exercice 5. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(t) = t^3 \cos(1/t^2) \quad \text{pour } t \neq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable en 0.
2. f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}$?
3. f est-elle tangente à 0 à l'ordre 2 en $t = 0$?

Correction.

1. Le taux d'accroissement tend vers 0, donc $f'(0) = 0$.
2. Non, la dérivée (à calculer !) n'est pas continue en 0.
3. Oui, on le vérifie directement.