Calcul différentiel – TD 1 avec corrections

Espaces affines, fonctions continues, notations de Landau

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(t) = x_0 + \alpha t$, où $x_0, \alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\mathbb{R}$ est naturellement un espace affine et que f est une application affine.
3. On suppose que $f(t) = o(t)$ quand $t \to 0$ (notation « o » de Landau). Que peut-on dire de x_0 et α_0 ?
4. Décrire l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient $f(t) = o(t)$ et $f(0) = 0$, en termes de continuité et dérivabilité.

Correction.

1. f est polynomiale donc continue. On pourrait aussi directement montrer la définition avec les ε, α... ou encore voir que $|f(t) - fs| = |\alpha|\,|t - s|$, donc f est Lipschitzienne.
2. $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel, donc naturellement un espace affine. On voit que $f(t) = f(0) + \alpha \cdot (t - 0)$, et l'application $A : u \mapsto \alpha u$ est linéaire sur $\mathbb{R}$, donc f a bien la forme d'une fonction affine : $f(t) = f(0) + A(t - 0)$.
3. Puisque f est continue en 0, le fait que $f(t) = o(t)$ implique que $f(0) = 0$. (En effet, la continuité dit que $\lim_{t\to 0} f(t) = f(0)$, et le fait que $f(t) = o(t)$ implique que $\lim_{t\to 0} f(t) = 0$; par unicité de la limite, $f(0) = 0$.) Donc $x_0 = 0$.
   Puis, le fait que $f(t) = o(t)$ dit aussi que $f(t)/t \to 0$, ce qui s'écrit aussi
   $$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} \to 0 \text{ lorsque } t \to 0$$
   ce qui veut dire que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
   Réciproquement : tout fonction f telle que $f(0) = 0$, et qui est dérivable en 0 et de dérivée nulle, vérifie $f(t) = o(t)$.
   On a donc entièrement décrit l'ensemble en question.

Exercice 2. Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée. Toutes les fonctions mentionnées f, g, h sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1) Soit λ un réel non nul. $f = o(g)$ en $t_0 \implies f = o(\lambda g)$ et $\lambda f = o(g)$ en t_0.
2) $f_1 = o(g_1)$ et $f_2 = o(g_2)$ en $t_0 \implies f_1 + f_2 = o(g_1 + g_2)$ en t_0.
3) $f = o(g)$ et $g = o(h)$ en $t_0 \implies f = o(h)$ en t_0.

4) Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application telle que $\lim_{t \to t_1} \phi(t) = t_0$.
$f = o(g)$ en $t_0 \implies f \circ \phi = o(g \circ \phi)$ en t_1.

5) Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application.
$f = o(g)$ en $t_0 \implies \phi \circ f = o(\phi \circ g)$ en t_0.

Mêmes questions pour $\mathcal{O}$ à la place de o.

Correction.

1. L'assertion est vraie.
En effet, on a $f(t) = g(t)\varepsilon(t)$ et $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \varepsilon(t) = 0$. Comme $\lambda \neq 0$, On aura alors $f(t) = \lambda g(t)\varepsilon_1(t)$, avec $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\lambda}$ et $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \varepsilon_1(t) = 0$, on a donc montré que $f = o(g)$ en t_0.
De même on a $\lambda f(t) = \lambda g(t)\varepsilon_2(t)$, avec $\varepsilon_2 = \lambda\varepsilon$ et $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \varepsilon_2(t) = 0$, d'où $\lambda f = o(g)$ en t_0.
2. L'assertion est fausse. Contre-exemple : $f_1(t) = f_2(t) = t$, $g_1(t) = 1$, $g_2(t) = -1$ et $t_0 = 0$. Alors $f_1(t) + f_2(t) = 2t$ n'est pas un petit o de $g_1 + g_2 = 0$ en $t = 0$.
3. L'assertion est vraie. On a par hypothèse $f(t) = g(t)\varepsilon_1(t)$ avec $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \varepsilon_1(t) = 0$ et $g(t) = h(t)\varepsilon_2(t)$ et $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \varepsilon_2(t) = 0$.
Alors $f(t) = h(t)\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \varepsilon(t) = \lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \varepsilon_1(t)\varepsilon_2(t) = 0$. D'où $f = o(h)$ en t_0.
4. L'assertion est vraie. En effet, on a $f(t) = g(t)\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \varepsilon(t) = 0$. Alors $f \circ \varphi = g \circ \varphi.\varepsilon_1$ avec $\varepsilon_1 = \varepsilon \circ \varphi$. Comme $\lim\limits_{\substack{t \to t_1 \\ t \neq t_1}} \varepsilon_1 = \lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \varepsilon(t) = 0$, on a bien $f \circ \varphi = o(g \circ \varphi)$ en t_1.
5. L'assertion est fausse. Contre-exemple : $f(t) = t^2$ et $g(t) = t$, $\varphi(t) = e^t$ et $t_0 = 0$.
Comme $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$, on a bien $f = o(g)$ en 0,
mais, $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{\varphi(f(t))}{\varphi(g(t))} = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{e^{t^2}}{e^t} = 1$, d'où $\varphi \circ f$ n'est pas un petit o de $\varphi \circ g$ en $t = 0$.

Pour $\mathcal{O}$, on a les mêmes réponses : les assertions 2. et 5. sont fausses, les autres sont vraies.
Contre-exemple pour le 5) : $f(t) = \frac{2}{t^2}$ et $g(t) = \frac{1}{t^2}$, sur $I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(0) = g(0) = 0$ et $\varphi(t) = e^t$. Comme $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(t)}{g(t)} = 2$, on a bien $f = \mathcal{O}(g)$ en 0,
mais, $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{\varphi(f(t))}{\varphi(g(t))} = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{\exp(\frac{2}{t^2})}{\exp(\frac{1}{t^2})} = +\infty$, d'où $\varphi \circ f$ n'est pas un grand o de $\varphi \circ g$ en $t = 0$.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel normé et $f : \mathbb{R} \to E$. On dit que f est continue en $t_0 \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ tel que : « si $s \in \mathbb{R}$ est tel que $|t_0 - s| < \alpha$, alors $\|f(t_0) - f(s)\| < \varepsilon$ ».
On suppose f continue en 0 ; montrer que pour toute suite $t_k \to 0$, on a $\|f(t_k) - f(0)\| \to 0$.

Correction.

1. Soit (t_k) une suite tendant vers 0. Donc pour tout $\delta > 0$ on peut trouver un $K \in \mathbb{N}$ tel que $|t_k| \leqslant \delta$ pour tous $k \geqslant K$.
2. On veut montrer que $\|f(t_k) - f(0)\| \to 0$: autrement dit, on se donne un $\varepsilon > 0$ arbitraire et on veut trouver un $K \in \mathbb{N}$ tel que $\|f(t_k) - f(0)\| < \varepsilon$ pour tous $k \geqslant K$.
3. Or, pour ce même ε, on applique la définition de continuité de f en 0, ce qui fournit un $\alpha > 0$ tel que $\|f(t) - f(0)\| < \varepsilon$ dès lors que $|t - 0| < \alpha$.

La conclusion voulue est donc obtenue si on s'assure que $|t_k| < \alpha$ pour $k \geqslant K$. Il suffit donc de choisir le δ ci-dessus (point 1) égal à α. Ce point 1 nous fournit un K, et on voit que ce K vérifie bien le point 2, CQFD.

Exercice 4. Soit $\ell^\infty(\mathbb{N};\mathbb{R})$ l'ensemble des suites bornées $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients réels.

1. Montrer que $E := \ell^\infty(\mathbb{N};\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sup_n |x_n|$ est une norme sur E, qu'on notera $\|(x_n)\|_\infty$.
3. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to E$ définie par

$$t \mapsto f(t) := (e^{-nt^2})_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

   Montrer que f n'est pas continue en 0 pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Correction.

1. On peut clairement additionner terme à terme deux suites bornées $x, y \in E$, ce qui donne une nouvelle suite bornée $z = x + y$, car $|z_n| = |x_n + y_n| \leqslant |x_n| + |y_n|$. Cette addition est clairement une loi de groupe abélien (commutative, associative, élément neutre = la suite nulle (qui est bien bornée !), l'opposé de x est la suite $-x = (-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$).
   La loi externe $\mathbb{R} \times E \to E$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$ est bien sûr donnée par la multiplication terme à terme par le scalaire λ :

$$(\lambda \cdot x)_n = \lambda x_n.$$

   La suite $\lambda \cdot x$ est bien bornée (le vérifier !) et on vérifie les 4 axiomes : distributive à gauche et à droite, 1 est élément neutre, et associative pour les scalaires (ce qui s'écrit $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$: de façon équivalente, on peut dire que cette loi définit une action du groupe $(\mathbb{R}^*, \times)$ sur E.)

2. Il suffit de vérifier les 3 axiomes de la norme. L'homogénéité est claire. Pour la séparation : si $\sup_n |x_n| = 0$, alors par définition du sup, tous les $|x_n|$ sont $\leqslant 0$, et donc nuls. Pour l'inégalité triangulaire, attention à la rédaction. Par exemple :
   Pour tous n, $|x_n + y_n| \leqslant |x_n| + |y_n|$. Or $|x_n| \leqslant \sup_n |x_n|$ et de même pour $|y_n|$. Donc pour tous n,
   $$|x_n + y_n| \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty .$$
   Donc $\|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ est un majorant de l'ensemble des $|x_n + y_n|$. La borne supérieure étant le plus petit des majorants, on a bien
   $$\|x + y\|_\infty = \sup |x_n + y_n| \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty .$$

3. Si f était continue en 0, on devrait avoir $\lim_{t\to 0} f(t) = f(0)$, la limite étant comprise au sens de la norme sur E (voir exercices 3 et **??**), c'est-à-dire
   $$\lim_{t\to 0} \|f(t) - f(0)\|_\infty = 0$$
   Or, la suite $f(0)$ est la suite constante $(x_n = 1)$. Donc la suite $f(t) - f(0)$ est la suite $(x_n(t) - 1)_{n\in\mathbb{N}} = (e^{-nt^2} - 1)_{n\in\mathbb{N}}$. Donc pour tout entier k,
   $$\|f(t) - f(0)\|_\infty = \sup_n |x_n(t) - 1| = \sup_n \left|e^{-nt^2} - 1\right| \geqslant \left|e^{-kt^2} - 1\right|$$
   Or, si $t \neq 0$, $e^{-kt^2} - 1 \to -1$ quand $k \to \infty$. Donc, en passant à la limite $k \to \infty$ on en déduit que, pour tout $t \neq 0$, $\|f(t) - f(0)\|_\infty \geqslant 1$. On ne peut donc pas avoir $\lim_{t\to 0} f(t) = f(0)$.

Exercice 5. Montrer que l'ensemble des suites réelles qui convergent vers 1 est naturellement un espace affine. Donner une norme sur l'espace vectoriel associé.

Correction. On rappelle que si X est un espace affine contenu dans un grand espace vectoriel (ici : celui de toutes les suites), et si $x \in X$, les élément de l'espace vectoriel associé à X sont les différences $y - x$, pour $y \in X$.
On remarque que la différence de deux suites tendant vers 1 est une suite tendant vers 0, et que l'espace E des suites tendant vers 0 est bien un espace vectoriel (le vérifier !).
Plus précisément, en choisissant par exemple $x=$ la suite constante égale à 1, on a bien $x \in X$, et (le vérifier)
$$X = \{x\} + E .$$
Donc X est bien un espace affine associé à E.
Comme E est un sous espace des suites bornées de l'exercice 4, on peut munir E de la même norme $\|\cdot\|_\infty$.