Calcul différentiel, CC2, 2025, 1h

Exercice 1 [sur 8 points]:

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = \begin{pmatrix} \sin(x+y) \\ 2xy^3 \\ ye^x \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier brièvement que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.
   (b) Soit $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Rappeler la définition des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$, puis donner leurs expressions explicites.
   (c) Rappeler le lien entre la différentielle et les dérivées partielles.
   (d) En déduire l'expression explicite de $df(z_0)$ et de la matrice Jacobienne de f en z_0.
   (e) Ecrire l'approximation de $f(z_0 + h)$ fournie par la différentielle et donner sa version matricielle.
2. Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(u,v,w) = \begin{pmatrix} 2u + uv^2w^3 \\ ue^v \end{pmatrix}$. Déterminer l'expression explicite de la matrice Jacobienne de g.
3. Déterminer la différentielle de $f \circ g$ au point $p = (1, 0, 3)$.
4. En déduire les dérivées partielles de $f \circ g$ au point p.

Exercice 2 [sur 5 points]: Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \sin(y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

1. f admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$?
2. f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 3 [sur 7 points]: On note $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornées de nombres réels indexées par $\mathbb{N}$, muni de la norme

$$\|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

1. Montrer que si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ alors $(x_n^3)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

   Ceci légitime la définition de l'application

$$\left| \begin{array}{rccc} F : & \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}) & \to & \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \\ & x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & F(x) = (x_n^3)_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$$

2. Montrer que F est différentiable et calculer sa différentielle.
3. Montrer que F est de classe C^1.

Exercice 1 [sur 8 points, 1 point/question]:

1. (a) Les 3 composantes de f sont des compositions et/ou produits de fonctions C^∞, car polynôme, sinus ou exponentielle.

   (b) La dérivée partielle de f par rapport à la variable x au point z_0 est la dérivée de l'application $x \mapsto f(x, y_0)$ au point x_0 donc $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \begin{pmatrix} \cos(x_0+y_0) \\ 2y_0^3 \\ y_0 e^{x_0} \end{pmatrix}$. La dérivée partielle de f par rapport à la variable y au point z_0 est la dérivée de l'application $y \mapsto f(x_0, y)$ au point y_0 donc $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \begin{pmatrix} \cos(x_0+y_0) \\ 6x_0y_0^2 \\ e^{x_0} \end{pmatrix}$.

   (c) Comme f est différentiable en z_0 alors $df(z_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ est l'application linéaire, définie, pour tout $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ par $df(z_0).h = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)h_2$

   (d) On en déduit que, pour tout $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, on a $df(z_0).h = \begin{pmatrix} \cos(x_0+y_0)(h_1+h_2) \\ 2y_0^3h_1 + 6x_0y_0^2h_2 \\ (y_0h_1+h_2)e^{x_0} \end{pmatrix}$.
   La Jacobienne de f en z_0 est la matrice de cette application linéaire dans la base canonique, c'est-à-dire

$$\mathrm{Jac}(f)(z_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \,\middle|\, \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \right) = \begin{pmatrix} \cos(x_0+y_0) & \cos(x_0+y_0) \\ 2y_0^3 & 6x_0y_0^2 \\ y_0e^{x_0} & e^{x_0} \end{pmatrix}$$

   (e) $f(z_0+h) = f(z_0) + df(z_0).h + o(h)$ se reformule en
$$\begin{pmatrix} \sin(x_0+h_1+y_0+h_2) \\ 2(x_0+h_1)(y_0+h_2)^3 \\ (y_0+h_2)e^{x_0+h_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(x_0+y_0) + \cos(x_0+y_0)(h_1+h_2) \\ 2x_0y_0^3 + 2y_0^3h_1 + 6x_0y_0^2h_2 \\ y_0e^{x_0} + (y_0h_1+h_2)e^{x_0} \end{pmatrix} + o(h).$$

2. $g \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ pour les mêmes raisons que f. Pour tout $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, $dg(u, v, w) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ est l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est
$$\mathrm{Jac}(g)(u,v,w) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v,w) \,\middle|\, \frac{\partial g}{\partial v}(u,v,w) \,\middle|\, \frac{\partial g}{\partial w}(u,v,w) \right) = \begin{pmatrix} 2+v^2w^3 & 2uvw^3 & 3uv^2w^2 \\ e^v & ue^v & 0 \end{pmatrix}.$$

3. D'après le théorème des fonctions composées, $d(f \circ g)(p) = df(g(p)) \circ dg(p)$. Comme $p = (1, 0, 3)$ et $g(p) = (2, 1)$ alors $d(f \circ g)(p) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est
$$\mathrm{Jac}(f)(g(p))\mathrm{Jac}(g)(p) = \begin{pmatrix} \cos(3) & \cos(3) \\ 2 & 12 \\ e^2 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cos(3) & \cos(3) & 0 \\ 16 & 12 & 0 \\ 3e^2 & e^2 & 0 \end{pmatrix}$$

4. On en déduit que $\frac{\partial f\circ g}{\partial u}(p) = \begin{pmatrix} 3\cos(3) \\ 16 \\ 3e^2 \end{pmatrix}$, $\frac{\partial f\circ g}{\partial v}(p) = \begin{pmatrix} \cos(3) \\ 12 \\ e^2 \end{pmatrix}$, $\frac{\partial f\circ g}{\partial w}(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 [sur 5 points= 2+3]:

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x,0) = 0$ donc f admet une dérivée partielle par rapport à la variable x en $(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(0,y) = 0$ donc f admet une dérivée partielle par rapport à la variable y en $(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

2. Par l'absurde, on suppose que f est différentiable en $(0,0)$. Alors $df(0,0) : h \in (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \to \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)h_2 = 0$. Donc $\epsilon(x,y) := \frac{f(x,y)-f(0,0)+df(0,0).(x,y)}{\|(x,y)\|} \to 0$ quand $(x,y) \to 0$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\epsilon(x,x) = \frac{x\sin(x^2)}{(2x^2)^{3/2}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{2}}$: contradiction.

Exercice 3 [sur 7 points = 1 + 4 + 2]: Pour simplifier les notations, on note ℓ^∞ au lieu de $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$

1. Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|x_n^3| \leq \|x\|_\infty^3$ donc $(x_n^3)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$.

2. Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$.

   Etape 1: Définition (1 point) et continuité (1 point) du candidat. Pour tout $h = (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $|3x_n^2 h_n| \leq 3\|x\|_\infty^2\|h\|_\infty$ donc $(3x_n^2h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$. Ceci légitime la définition de l'application
   $$\left| \begin{array}{rccc} L: & \ell^\infty & \to & \ell^\infty \\ & h & \mapsto & (3x_n^2h_n)_{n\in\mathbb{N}}. \end{array} \right.$$
   Clairement, L est linéaire. On a déjà montré que, pour tout $h \in \ell^\infty$, $\|L(h)\|_\infty \leq 3\|x\|_\infty^2\|h\|_\infty$ donc L est continue.
   Etape 2: Estimation (2 points) Soit $h \in \ell^\infty$. Par définition, on a
   $$\|F(x+h) - F(x) - L(h)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|(x_n+h_n)^3 - x_n^3 - 3x_n^2h_n\right|.$$
   Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\left|(x_n+h_n)^3 - x_n^3 - 3x_n^2h_n\right| = \left|3x_nh_n^2 + h_n^3\right| \leq 3\|x\|_\infty\|h\|_\infty^2 + \|h\|_\infty^3$$
   donc
   $$\|F(x+h) - F(x) - L(h)\|_\infty \leq 3\|x\|_\infty\|h\|_\infty^2 + \|h\|_\infty^3.$$
   Ceci montre que $\|F(x+h) - F(x) - L(h)\|_\infty = o(\|h\|_\infty)$ quand $\|h\|_\infty \to 0$.
   Ainsi, F est différentiable en x et $dF(x) = L$. Ceci est vrai pour tout $x \in \ell^\infty$ donc F est différentiable.

3. Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$. On a
   $$\left| \begin{array}{rccc} dF(x) - dF(y): & \ell^\infty & \to & \ell^\infty \\ & h = (h_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \left(3(x_n^2 - y_n^2)h_n\right)_{n\in\mathbb{N}}. \end{array} \right.$$
   Pour $h \in \ell^\infty$ et $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$\left|3(x_n^2 - y_n^2)h_n\right| = |3(x_n - y_n)(x_n + y_n)h_n| \leq 3\|x-y\|_\infty(\|x\|_\infty + \|y\|_\infty)\|h\|_\infty$$
   donc $\|(dF(x) - dF(y)).h\|_\infty \leq 3\|x-y\|_\infty(\|x\|_\infty + \|y\|_\infty)\|h\|_\infty$. Ainsi,
   $$\|dF(x) - dF(y)\|_{\mathcal{L}_c(\ell^\infty)} \leq 3\|x-y\|_\infty(\|x\|_\infty + \|y\|_\infty).$$
   Ceci montre que $\|dF(x) - dF(y)\|_{\mathcal{L}_c(\ell^\infty)} \to 0$ quand $\|x-y\|_\infty \to 0$. Ainsi dF est continue en x. Ceci est vrai pour tout $x \in \ell^\infty$ donc F est de classe C^1.